Πραγματική Ανάλυση

30-10-17

Πρόταση: Έστω I, I_i, $i=1,2,\dots$ να είναι φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}^2$ τω

(*) $\boxed{I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i}$ Τότε ισχύει $V(I) \le \sum_{i=1}^{+\infty} V(I_i)$

Απόδειξη

Από προηγούμενη πρόταση υπάρχει κλειστό διάστημα I' τω

(1) $\boxed{I' \subseteq I}$ και $\boxed{V(I) - \varepsilon_0 < V(I')}$ (2) για σταθερό $\varepsilon_0 > 0$.

Επίσης, από την ίδια πρόταση για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ανοιχτό διάστημα I''_n ώστε:

$$(3)\ \boxed{I_n \subseteq I''_n} \quad \text{και} \quad (4)\ \boxed{V(I''_n) < V(I_n) + \frac{\varepsilon_0}{2^n}} \quad \forall n=1,2,\dots$$

Από την (3) έπεται ότι: $\boxed{\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I''_n}$ (5)

Από τις (1), (*) και (5) έπεται ότι:

$$I' \subseteq I \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I''_n \Rightarrow \boxed{I' \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I''_n}$$

I, I' είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο.

Άρα, από γνωστό Θεώρημα της ανάλυσης στον $\mathbb{R}^2$ έπεται ότι το I' είναι συμπαγές.

κλειστό & φραγμένο διάστημα => συμπαγές

Άρα, από τον ορισμό του συμπαγούς συνόλου $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τω: Σχόλιο ?

$$\boxed{I' \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} I''_n} \quad (6)$$

Από, προηγούμενη πρόταση και την (6) έπεται ότι:

$$\boxed{V(I') \le \sum_{n=1}^{n_0} V(I''_n)} \quad (7)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (4) για $n=1,2,\dots n_0$ και παίρνω

$$\sum_{n=1}^{n_0} V(I''_n) < \sum_{n=1}^{n_0} V(I_n) + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon_0}{2^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_0}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) + \varepsilon_0 \quad (8)$$

Μας ενδιαφέρει μόνο όταν $\sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) < +\infty$

Σχόλιο!

Από τις (7), (8) $\Rightarrow$ $\boxed{V(I') < \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) + \varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{V(I') - \varepsilon_0 < \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n)} \quad (9)$$

Από τις (2), (9) έχουμε:

$$\boxed{V(I) - \varepsilon_0 < \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) + \varepsilon_0} \quad (10)$$

$$V(I) - \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) < 2\varepsilon_0$$

Άρα, $V(I) - \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{V(I) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n)}$

σ-υποπροσθετικότητα για διαστήματα $\square$

<u>Πρόταση</u> Έστω I, I_n $n=1,2,\ldots$ φραγμένα διαστήματα στον $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε τα I_i, $i=1,2,\ldots$ να είναι σχεδόν ξένα ανά δύο και $I = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Τότε ισχύει: $V(I) = \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n)$

<u>Απόδειξη</u>:

Έχουμε δείξει ότι:

αν $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \subseteq I \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) \leq V(I)}$ (1)

για το ίσον εδώ.

Από αυτό που δείξαμε πριν, έχουμε ότι επειδή

$I \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \Rightarrow \boxed{V(I) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n)}$ (2)

για το ίσον

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι:

$$\boxed{V(I) = \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n)}$$

Αν πάρω ένα ορθογώνιο κατά και το κόψω σε μικρά άλλα ορθογώνια τότε το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου θα είναι ίσο με το άθροισμα των μικρότερων.

$\leftarrow$ τι μας λέει η πρόταση

$\square$

Η νιάδα $(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ έχει τις εξής ιδιότητες

1) $\underset{\mathbb{R}^n}{(x_1, \dots x_n)} = \underset{\mathbb{R}^n}{(y_1, \dots y_n)} \Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots x_n = y_n$

2) $(x_1, x_2, \dots x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots x_n+y_n)$

3) $\lambda(x_1, \dots x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Ορισ: Έστω $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$ και $b_1, b_2, \dots b_n \in \mathbb{R}$ $\forall i = 1, 2, \dots n$, $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$.

$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_i, b_i] \ \forall i = 1 \dots n\}$

ορίζονται όλων των ειδών διαστήματα

- Το σύνολο όλων των φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο
  $\mathcal{L}_n = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \mid \exists\, I_i \in \mathcal{L}_1$, για $i = 1, 2, \dots n$ ώστε $X = I_1 \times \dots \times I_n\}$

- $\mathcal{L}_{n,1} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \mid \exists\, I_i \in \mathcal{L}_1$, ανοικτά ώστε $X = I_1 \times \dots \times I_n\}$

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ είναι το δυναμοσύνολο

- **Ιδιότητες**

1) Έστω $I_i \in \mathcal{L}_1$ και $J_j \in \mathcal{L}_1$ για $i, j = 1, \dots n$ (έχω διάταξη)
   $I_1 \times I_2 \times \dots I_n = J_1 \times J_2 \times \dots J_n$ αν και μόνο αν $I_i = J_i \quad i = 1, \dots n$

2) $I_1 \times I_2 \times \dots I_n \subseteq J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n$ αν και μόνο αν $I_i \subseteq J_i \quad i = 1, \dots n$

Ορισμός

Η συνάρτηση όγκος $V : \mathcal{L}_n \to \mathbb{R}$.

Έστω διάστημα $I_1 \times I_2 \times \dots I_n \in \mathcal{L}_n$ ορίζουμε

$V_n(I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n) = \mu(I_1)\,\mu(I_2) \dots \mu(I_n)$

π.χ. $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ με $a_i \in \mathbb{R}$ $a_i < b_i$, $b_i \in \mathbb{R}$ $\forall i = 1, 2, \dots n$

$V([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$

στον $\mathbb{R}^2$ είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου
στον $\mathbb{R}^3$ είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου

Σχόλιο!

Ιδιότητες

3) Αν $I, J \in \mathcal{L}_n$ και $I \subseteq J$ τότε $v(I) \leq v(J)$ (άσκηση)

Από τον Απλογ. 1
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A είναι κάτω φραγμένο
$\exists x \in \mathbb{R} : x \leq a \ \forall a \in A$
$B := \{$κάτω φράγματα του $A \mid x \in \mathbb{R} : x \leq a, \forall a \in A\}$
1) $x \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$
2) B: άνω φραγμένο, γιατί $\exists b \in A : b \geq x \ \forall x \in B$
ΑΞ 12 του $\mathbb{R}$, το B έχει άνω φράγμα, έστω $\sup B$.
Ορίζω $\inf A = \sup B$

Προσοχή

- Για $n \in \mathbb{N}$, είμαστε στο $\mathbb{R}^m$

$I_n = \underbrace{(-n,n) \times (-n,n) \times \dots \times (-n,n)}_{m \text{ φορές}} = (-n,n)^m$

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n = \mathbb{R}^m$ Άρα, αν $A \subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^m$

- $(x_1, x_2, \dots x_n)$ $x_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, \dots m$

$N_0 \in \mathbb{N}$. $N_0 > |x_i| \quad \forall i = 1, 2, \dots m$

$x_i \in (-N_0, N_0) \quad \forall i = 1, 2 \dots m$

$\vec{x} \in I_{N_0} \Rightarrow \vec{x} \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$

ορισμός: Έστω A, A_i $i = 1, 2, \dots$ υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$ με $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$
Τότε, η οικογένεια των συνόλων A_i, $i = 1, 2, \dots$ ονομάζεται κάλυψη του A.

ορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue στον χώρο $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

Θεωρούμε ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^m$.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το A

κάλυψη
$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$, $I_n \in \mathcal{L}_{m,1}$

εξετάζουμε ορίσει $\sum_{n=1}^{+\infty} v_m(I_n)$

είναι ανοιχτά διαστήματα

1) Αν για κάθε κάλυψη της μορφής I_n, $n=1,2,\ldots$ $I_n \in \mathcal{L}_{m,1}$ να ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) = +\infty$. Τότε, ορίζουμε το εξωτερικό μέτρο Lebesgue του A να είναι το $+\infty$. Συμβολικά: $m^*(A) = +\infty$

2) Υπάρχει μια οικογένεια I_n, $n=1,2,\ldots$ ανοιχτά φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}^m$ (δηλαδή: $I_n \in \mathcal{L}_{m,1}$ $\forall n=1,2,\ldots$) η οποία καλύπτει το A (δηλ. $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$) και $\sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) < +\infty$

↳ είναι κάτω φραγμένο από το 0

Ορίζουμε το εξωτερικό μέτρο Lebesgue του A να είναι ο αριθμός

$m^*(A) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid$ υπάρχει μια οικογένεια ανοιχτών και φραγμένων διαστημάτων I_1, I_2 του $\mathbb{R}^m$ του $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n)\}$$

$m^*(A)$ ο συμβολισμός του εξ. μέτρου Lebesgue του A στον $\mathbb{R}^m$

αξίωμα του Απλοξ I. $\forall$ κάτω φραγμένο σύνολο έχει infimum

Υπενθύμιση !

$\forall$ παραδείγματα

1) $m^*(\phi) = 0$

Θέτω $I_n = \phi$ για κάθε $n=1,2,\ldots$

Τότε $\phi \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} V(\phi) = 0$$

Αφού, ορίζουμε $\mu: \mathcal{L}_1 \to \mathbb{R}$ με $\mu(\phi) = 0$

$V(\phi \times \phi \ldots \times \phi) = \mu(\phi)\mu(\phi)\ldots\mu(\phi) = 0$

Από τον ορισμό $m^*(\phi) \leq 0$. (1)

$I \in \mathcal{L}_{m,1}$

εξ ορισμού $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_m$

$I_1 \in \mathcal{L}_1$

Όμως $\phi \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow \phi \in \mathcal{L}_{m,1}$

αν βρεθεί σε καρτεσιανό γινόμενο το κενό, τα μηδενίζει όλα

Σχόλιο !